

①

«بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم» مربوط به کدام علم است؟

- (۱) فقط علم آمار
(۲) فقط علم احتمال
(۳) هم علم آمار و هم علم احتمال
(۴) نه علم آمار و نه علم احتمال

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به تعریف کتاب درسی از علم احتمال، اگر جامعه معلوم باشد و به دنبال نمونه‌ای نامعلوم از این جامعه باشیم، موضوع مربوط به علم احتمال است.

②

در ظرف A، ۳ سیب قرمز و ۴ سیب زرد و در ظرف B، ۵ سیب قرمز و ۳ سیب زرد وجود دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو سیب به طور متوالی و بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن که هر دو سیب قرمز باشند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

اگر C پیشامد آن باشد که هر دو سیب قرمز باشند، آنگاه،

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{14} + \frac{5}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

③

اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه حاصل $P[(A - B)']$ کدام است؟

- (۱) $P(A') - P(A \cap B)$
(۲) $P(A') + P(A \cap B)$
(۳) $P(A') - P(B)$
(۴) $P(A') + P(B)$

پاسخ: گزینه ۲

بنابر قانون‌های (اصول) احتمال و جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} P[(A - B)'] &= P[(A \cap B')'] = P(A' \cup (B')') = P(A' \cup B) \\ &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = P(A') + P(B) - P(B - A) \\ &= P(A') + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) = P(A') + P(A \cap B) \end{aligned}$$

روش دوم (قانون احتمال متمم):

$$\begin{aligned} P[(A - B)'] &= 1 - P(A - B) = 1 - (P(A) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) + P(A \cap B) = P(A') + P(A \cap B) \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۶%

قلمچی ۱۳۹۴

۴

در جعبه‌ی A، چهار مهره‌ی قرمز و پنج مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی B، سه مهره‌ی قرمز و چهار مهره‌ی آبی وجود دارد. به تصادف مهره‌ای را از جعبه‌ی A انتخاب و به جعبه‌ی B انتقال می‌دهیم. احتمال این‌که مهره‌ای که به تصادف از جعبه B انتخاب می‌کنیم قرمز باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned} (۲) \quad & \frac{۳۱}{۷۲} \\ (۴) \quad & \frac{۷}{۲۴} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \frac{۲۹}{۷۲} \\ (۳) \quad & \frac{۵}{۲۴} \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۶%

قلمچی ۱۳۹۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{۳}{۸} &\rightarrow \text{مهره ی انتخاب شده از جعبه B قرمز باشد.} \\ \frac{۵}{۸} &\rightarrow \text{مهره ی انتخاب شده از جعبه B آبی باشد.} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{۵}{۹} \text{ مهره ی انتخاب شده از جعبه A آبی باشد.}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{۴}{۸} &\rightarrow \text{مهره ی انتخاب شده از جعبه B قرمز باشد.} \\ \frac{۴}{۸} &\rightarrow \text{مهره ی انتخاب شده از جعبه B آبی باشد.} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{۴}{۹} \text{ مهره ی انتخاب شده از جعبه A قرمز باشد.}$$

$$P(\text{مهره‌ی انتخابی از جعبه‌ی B قرمز باشد...}) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۴}{۸} = \frac{۱۵+۱۶}{۷۲} = \frac{۳۱}{۷۲}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

۵

اگر $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی، $A = \{a_1, a_2\}$ ، $B = \{a_2, a_3\}$ و $C = \{a_4, a_5\}$ است. اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{2}{5}$ و $P(C) = \frac{1}{5}$ باشد، احتمال پیشامد $\{a_1\}$ کدام است؟

$$(۴) \quad \frac{1}{5}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{6}$$

$$(۲) \quad \frac{2}{15}$$

$$(۱) \quad \frac{1}{10}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$P(A \cup B) = P(\{a_1, a_2, a_3\}) = 1 - P(\{a_4, a_5\}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(a_2)$$

$$\Rightarrow P(a_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{10+12-15}{30} = \frac{7}{30}$$

$$P(a_1) = P(\{a_1, a_2\}) - P(a_2) = \frac{1}{3} - \frac{7}{30} = \frac{10-7}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۸

۶

برای دو پیشامد A و B، اگر $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B) = \frac{1}{8}$ باشد، $P(A|B')$ کدام است؟

$$(۴) \quad \frac{1}{5}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{4}$$

$$(۲) \quad \frac{1}{3}$$

$$(۱) \quad \frac{1}{2}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{7}{48}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۷%

قلمچی ۱۳۹۶

۷

دو کیسه داریم که در اولی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. از هر کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این ۶ مهره هم‌رنگ هستند؟

(۴) $\frac{3}{175}$ (۳) $\frac{3}{25}$ (۲) $\frac{1}{175}$ (۱) $\frac{1}{25}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۷%

قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۲

چون تعداد مهره‌های سیاه در کیسه‌ی دوم، کمتر از ۳ است، پس تنها حالت ممکن آن است که از هر کیسه، ۳ مهره سفید خارج شود. داریم:

$$\frac{\binom{3}{3} \times \binom{4}{3}}{\binom{7}{3} \binom{6}{3}} = \frac{4}{35 \times 205} = \frac{1}{175}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلمچی ۱۳۹۸

۸

در یک آزمایش تصادفی، $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ فضای نمونه و $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{1, 2, 4\}$ دو پیشامد در این فضای نمونه هستند. اگر نتیجه آزمایش عدد ۳ باشد، آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) A و B دو پیشامد ناسازگار هستند.ب) پیشامد A رخ داده است.پ) پیشامد B رخ داده است.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲

اشتراک دو پیشامد A و B ناتهی است، پس این دو پیشامد ناسازگار نیستند. همچنین $3 \in A$ و $3 \notin B$ ، پس در صورتی که نتیجه آزمایش عدد ۳ باشد، پیشامد A رخ داده است ولی پیشامد B رخ نداده است.

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۳

۹

یک دسته کارت، شامل ۶ کارت سفید و ۵ کارت سیاه و دسته دیگر شامل ۹ کارت سفید است. یکی از دسته‌ها را به تصادف انتخاب و از آن دو کارت خارج می‌کنیم. اگر هر دو کارت سفید باشند، احتمال آن که از دسته اول انتخاب شده باشند، کدام است؟

(۲) $\frac{3}{14}$ (۴) $\frac{3}{11}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{16}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۲

اگر A_1 پیشامد انتخاب دسته اول، A_2 پیشامد انتخاب دسته دوم و W پیشامد انتخاب دو کارت سفید باشد، آن‌گاه:

$$P(A_1|W) = \frac{P(A_1)P(W|A_1)}{P(A_1)P(W|A_1) + P(A_2)P(W|A_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}}{\frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{15}{55}}{\frac{1}{3} \times \frac{15}{55} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{14}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۷

۱۰

در پرتاب ۳ تاس می‌دانیم که جمع اعداد رو شده ۷ است. احتمال این‌که هر سه عدد رو شده فرد باشند، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۱) $\frac{3}{5}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۳

تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده سه تاس ۷ باشند، به صورت زیر است:

$$B = \{(1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 1, 5), (2, 2, 3)\}$$

۶ حالت

۳ حالت

۳ حالت

۳ حالت

فقط در ۶ حالت، هر سه عدد رو شده فرد هستند، بنابراین اگر A پیشامد رو شدن سه عدد فرد باشد، داریم:

$$P(A|B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

متوسط

سراسری ۱۴۰۱

۱۱

در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ یک فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با قدر نسبت کمتر از واحد، تشکیل دهند و واسطه هندسی آنها $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S، چقدر است؟

(۴) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$ (۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ (۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ (۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$

متوسط

سراسری ۱۴۰۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$p(y)$ واسطه هندسی بین $p(x)$ و $p(z)$ است. اگر قدر نسبت این دنباله هندسی را r ($r < 1$) در نظر بگیریم، آن گاه داریم:

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5r} + \frac{1}{5} + \frac{r}{5} = 1$$

$$\xrightarrow{\times 5r} 1 + r + r^2 = 5r \Rightarrow r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r=2+\sqrt{3} \\ r=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

دراین صورت کم ترین مقدار احتمال برابر است با :

$$P(z) = \frac{r}{5} = \frac{2-\sqrt{3}}{5}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۸%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۲

۱۲)

اگر $P(A - B) = ۰/۲$ و $P(B) = ۰/۴$ باشد، آنگاه $P(A'|B')$ کدام است؟

(۴) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۳}{۵}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۱) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$P(B) = ۰/۴ \Rightarrow P(B') = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (P(A) - P(A \cap B)) + P(B) \end{aligned}$$

$$= P(A - B) + P(B) = ۰/۲ + ۰/۴ = ۰/۶$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = ۱ - P(A \cup B) = ۰/۴$$

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{۰/۴}{۰/۶} = \frac{۲}{۳}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

قلمچی ۱۳۹۹

۱۳)

یک تاس ناهمگن طوری ساخته شده که احتمال رخداد اعداد اول با هم برابر و ۲ برابر احتمال رخداد اعداد دیگر است. اگر آن تاس را پرتاب کنیم، احتمال این که برآمد تاس، عددی زوج باشد یا از ۲ بیشتر نباشد، کدام است؟

(۴) $\frac{۴}{۹}$ (۳) $\frac{۵}{۹}$ (۲) $\frac{۷}{۱۲}$ (۱) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$

$$\Rightarrow x + ۲x + ۲x + x + ۲x + x = ۱$$

$$\Rightarrow ۹x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۹}$$

پیشامد آن که برآمد تاس، عددی زوج باشد یا از ۲ بیشتر نباشد، به صورت $A = \{۱, ۲, ۴, ۶\}$ است. بنابراین داریم:

$$P(A) = P(۱) + P(۲) + P(۴) + P(۶)$$

$$= \frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۸

۱۴

در آزمایش پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد فرد بودن مجموع دو تاس، B پیشامد فرد بودن حداقل یکی از تاس‌ها و C پیشامد رو شدن عدد ۴ در حداقل یکی از تاس‌ها باشد، کدام نادریست است؟

$$\begin{aligned} B \cap C &\subseteq A \quad (۲) \\ A \cap C &= B \cap C \quad (۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\subseteq B \quad (۱) \\ A \cap C &= \emptyset \quad (۳) \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا پیشامدها را توصیف می‌کنیم:

A = مجموع دو تاس فرد باشد $\rightarrow$ (ف, ز) یا (ز, ف)

B = حداقل یکی از تاس‌ها فرد باشد $\rightarrow$ (ف, ف) یا (ف, ز) یا (ز, ف)

C = حداقل یکی از تاس‌ها ۴ باشد $\rightarrow \left\{ (۴, ۱), \dots, (۴, ۶), (۱, ۴), \dots, (۶, ۴) \right\}$

گزینه «۱»: حالت‌های مربوط به پیشامد A، همگی در B وجود دارند. بنابراین $A \subseteq B$.

گزینه «۲»:

$$B \cap C = \{(۴, ۱), (۴, ۳), (۴, ۵), (۱, ۴), (۳, ۴), (۵, ۴)\}$$

در تمامی این زوج‌های مرتب، یکی از مؤلفه‌ها زوج و دیگری فرد است در نتیجه: $B \cap C \subseteq A$.

گزینه «۳»: زوج مرتب (۴, ۱) را در نظر بگیرید. این زوج مرتب در C وجود دارد و چون A شامل زوج‌های مرتبی به شکل (ف, ز) است، زوج مرتب (۴, ۱) در A هم هست. بنابراین: $A \cap C \neq \emptyset$.

گزینه «۴»: توجه کنید که:

$$A \cap C = \{(۴, ۱), (۴, ۳), (۴, ۵), (۱, ۴), (۳, ۴), (۵, ۴)\}$$

و این همان $B \cap C$ است که در گزینه «۲» به دست آوردیم.

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸%

قلمچی ۱۳۹۵

۱۵

در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان در کلاس A، دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود، تقریباً با کدام احتمال، این فرد از کلاس A است؟

$$\begin{aligned} (۲) \quad & ۰/۵۷ \\ (۴) \quad & ۰/۶۳ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) \quad & ۰/۴۳ \\ (۳) \quad & ۰/۶۱ \end{aligned}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸%

قلمچی ۱۳۹۵

پاسخ: گزینه ۲

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{قبول} \rightarrow ۰/۴ & \text{کلاس A} \rightarrow \frac{۲}{۳} \\ \text{مردود} \rightarrow ۰/۶ & \\ \text{قبول} \rightarrow ۰/۶ & \text{کلاس B} \rightarrow \frac{۱}{۳} \\ \text{مردود} \rightarrow ۰/۴ & \end{array} \right.$$

طبق قاعده‌ی بیز داریم:

$$P(A | \text{قبول}) = \frac{\frac{۲}{۳} \times ۰/۴}{\frac{۲}{۳} \times ۰/۴ + \frac{۱}{۳} \times ۰/۶} = \frac{\frac{۸}{۳۰}}{\frac{۸}{۳۰} + \frac{۶}{۳۰}} = \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{۷} \approx ۰/۵۷$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

قلمچی ۱۳۹۸

۱۶)

در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(a)$ ، $P(b)$ ، $P(c)$ و $P(d)$ به ترتیب از راست به چپ، یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ تشکیل دهند، مقدار $P(\{a, d\})$ کدام است؟

۴) $\frac{8}{10}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۲) $\frac{6}{10}$ ۱) $\frac{5}{10}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

قلمچی ۱۳۹۸

گزینه ۳

پاسخ:

اگر فرض $x = P(a)$ کنیم باشد، آنگاه داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} = 1 \Rightarrow \frac{40x}{27} = 1 \Rightarrow x = \frac{27}{40}$$

$$P(\{a, d\}) = P(a) + P(d) = \frac{27}{40} + \frac{1}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸%

قلمچی ۱۳۹۶

۱۷)

اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای، $P(\{a\}) = m^2$ ، $P(\{b, c\}) = \frac{2}{9}$ ، $P(\{d\}) = 2m$ و تخصیص احتمال مقبول فرض شود، آنگاه $P(\{a, d\})$ چند برابر $P(\{b, c\})$ است؟

۴) ۲

۳) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۱) $\frac{1}{5}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸%

قلمچی ۱۳۹۶

گزینه ۳

پاسخ:

چون تخصیص احتمال مقبول است، پس جمع احتمالات ۱ است.

$$m^2 + 2m + \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow m^2 + 2m - \frac{7}{9} = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{28}{9}}}{2} = \frac{-2 \pm \frac{10}{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

غ ق ق

m را قبول می‌کنیم که هر احتمال را در بازه‌ی $[0, 1]$ قرار دهد.

$$\frac{P(\{a, d\})}{P(\{b, c\})} = \frac{m^2 + 2m}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{2} = \frac{3}{5}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۶

۱۸)

$\frac{2}{3}$ از کارمندان اداره‌ای مرد و بقیه زن هستند. ۷۵ درصد از مردان و ۶۰ درصد از زنان این اداره متأهل‌اند. یک نفر به تصادف از بین کارمندان این اداره انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم که شخص انتخاب شده متأهل نیست، احتمال آن‌که مرد باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۶

اگر A پیشامد مرد بودن شخص انتخابی و B پیشامد متأهل بودن شخص انتخاب شده باشد، مورد خواسته شده در صورت سؤال $P(A|B')$ است. طبق قانون بیز:

$$P(A|B') = \frac{P(A) \times P(B'|A)}{P(B')}$$

$$P(B') = P(A) \times P(B'|A) + P(A') \times P(B'|A')$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A|B') = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}$$

۱۹)

اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی، $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, c\}$ ، $C = \{a, d, e\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه و $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{2}{5}$ و $P(C) = \frac{3}{5}$ باشد، آنگاه $P(A' \cap B')$ کدام است؟

(۱) $\frac{13}{30}$ (۲) $\frac{4}{15}$ (۳) $\frac{11}{30}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۸%

قلمچی ۱۳۹۸

گزینه های دام دار ۲

$$A \cup B = \{a, b, c\} \Rightarrow A' \cap B' = (A \cup B)' = \{d, e\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 3P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e))}_1 + 2P(a) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(a) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow P(a) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{d, e\}) = P(\{a, d, e\}) - P(a) = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۶%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۳

(۲۰)

اگر A_1 و A_2 دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن گاه چه تعداد از گزاره های زیر درست است؟

الف) اگر A_1 زیرمجموعه A_2 باشد، رخ دادن A_1 رخ دادن A_2 را نتیجه می دهد.

ب) رخ دادن پیشامد $A_1 \cap A_2$ ، یعنی هر دو پیشامد A_1 و A_2 رخ دهند.

پ) رخ دادن پیشامد $A_1 \cup A_2$ ، یعنی دست کم یکی از دو پیشامد A_1 و A_2 رخ دهند.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۶%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به مفهوم رخ دادن یک پیشامد، هر سه گزاره «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۰%

قلمچی ۱۳۹۸

(۲۱)

اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی، $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, c\}$ و $C = \{a, d, e\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه و $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{2}{5}$ و $P(C) = \frac{3}{5}$ باشد، آن گاه $P(A' \cap B')$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{11}{30}$ (۲) $\frac{4}{15}$ (۱) $\frac{11}{30}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۰%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۱

$$A \cup B = \{a, b, c\} \Rightarrow A' \cap B' = (A \cup B)' = \{d, e\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(a) + \underbrace{P(\{a, b, c, d, e\})}_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow 2P(a) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(a) = \frac{1}{6}$$

$$P(A' \cap B') = P(\{d, e\}) = P(\{a, d, e\}) - P(a) = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۶%

قلمچی ۱۳۹۷

(۲۲)

دو ظرف داریم که در ظرف اول، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم، ۵ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. از اولی ۲ مهره و از دومی ۳ مهره به تصادف برداشته و در ظرف جدیدی می ریزیم. سپس از ظرف جدید یک مهره بیرون می آوریم و مشاهده می کنیم که سفید است. با کدام احتمال این مهره متعلق به ظرف اول بوده است؟

(۴) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{2}{7}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۶%

قلمچی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از قاعده بیز داریم:

$$P(\text{ظرف اول} \mid \text{سفید بودن}) = \frac{P(\text{ظرف اول}) \times P(\text{سفید بودن} \mid \text{ظرف اول})}{P(\text{سفید بودن})}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}{\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۵%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۴

۲۳

در یک تیم والیبال که شامل ۱۰ بازیکن است، قد علی از مازیار بلندتر و از قد کامران کوتاهتر است. اگر بدانیم قد هیچ دو بازیکنی مساوی نیست، با چه احتمالی علی در بین اعضای تیم، از نظر بلندی قد دارای رتبه چهارم است؟

(۲) $\frac{۳}{۲۰}$
(۴) $\frac{۱}{۳۰}$

(۱) $\frac{۱}{۱۰}$
(۳) $\frac{۷}{۲۰}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۵%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه کاهش یافته ابتدا از بین ۱۰ جایگاهی که برای اعضای تیم وجود دارد. باید ۳ تا انتخاب کنیم، علی را در جایگاه وسطی و مازیار را در جایگاه کوتاهتر و کامران را در جایگاه بلندتر قرار بدهیم، بنابراین:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$$

پیشامد مطلوب آن است که علی در رتبه چهارم باشد، پس:



$$n(A) = \binom{۳}{۱} \binom{۶}{۱} = ۳ \times ۶ = ۱۸$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۸}{۱۲۰} = \frac{۳}{۲۰}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۹%

قلمچی ۱۳۹۶

۲۴

سکه‌هایی با شماره‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال آمدن رو در هر سکه، عکس شماره آن سکه باشد، احتمال آن‌که سکه‌ها یک در میان رو و پشت بیایند، کدام است؟

(۴) $\frac{۱۱}{۱۲۸}$

(۳) $\frac{۲۳}{۲۵۶}$

(۲) $\frac{۱۳}{۱۹۲}$

(۱) $\frac{۷}{۲۱۶}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۹%

قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به فرض مسئله، داریم:

$$P(\text{رو در سکه ۲}) = \frac{۱}{۲}, \quad P(\text{رو در سکه ۴}) = \frac{۱}{۴}$$

$$P(\text{رو در سکه ۶}) = \frac{۱}{۶}, \quad P(\text{رو در سکه ۸}) = \frac{۱}{۸}$$

بنابراین:

$$P(\text{یک در میان رو و پشت}) = \begin{cases} \begin{matrix} \boxed{۲} & \boxed{۴} & \boxed{۶} & \boxed{۸} \\ \text{ر} & \text{پ} & \text{ر} & \text{پ} \end{matrix} \\ \text{یا} \\ \begin{matrix} \boxed{۲} & \boxed{۴} & \boxed{۶} & \boxed{۸} \\ \text{پ} & \text{ر} & \text{پ} & \text{ر} \end{matrix} \end{cases}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۷}{۸} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱۳}{۱۹۲}$$

نسبتا دشوار

کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۵

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم، اگر مجموع اعداد رو شده بیشتر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره قرمز باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{180}{270}$ (۳) $\frac{173}{270}$ (۲) $\frac{165}{270}$ (۱) $\frac{157}{270}$

نسبتا دشوار

کنکور سراسری ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

پیشامد آنکه مجموع دو تاس عددی بیشتر از ۹ باشد، به صورت زیر مجموعه زیر است:

 $\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

یعنی احتمال این پیشامد برابر $\frac{1}{6}$ و در نتیجه متمم آن برابر $\frac{5}{6}$ است. طبق نمودار درختی داریم:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{1}{6}} \text{مجموع دو تاس بیشتر از ۹} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \xrightarrow{\frac{3}{9}} \text{خروج مهره قرمز} & \xrightarrow{\frac{5}{10}} \text{خروج مهره آبی} \\ \xrightarrow{\frac{6}{9}} \text{از ظرف دوم} & \xrightarrow{\frac{4}{10}} \text{از ظرف اول} \\ \xrightarrow{\frac{6}{9}} \text{خروج مهره قرمز} & \xrightarrow{\frac{5}{10}} \text{خروج مهره قرمز} \\ \xrightarrow{\frac{6}{9}} \text{از ظرف دوم} & \xrightarrow{\frac{4}{10}} \text{از ظرف اول} \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\frac{5}{6}} \text{مجموع دو تاس کوچکتر یا مساوی ۹} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \xrightarrow{\frac{4}{9}} \text{خروج مهره قرمز} & \xrightarrow{\frac{6}{10}} \text{خروج مهره آبی} \\ \xrightarrow{\frac{4}{9}} \text{از ظرف دوم} & \xrightarrow{\frac{6}{10}} \text{از ظرف اول} \\ \xrightarrow{\frac{5}{9}} \text{خروج مهره قرمز} & \xrightarrow{\frac{5}{10}} \text{خروج مهره قرمز} \\ \xrightarrow{\frac{5}{9}} \text{از ظرف دوم} & \xrightarrow{\frac{5}{10}} \text{از ظرف اول} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{6}{10} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{4}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{5}{10} \right) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{51}{9} + \frac{5}{6} \times \frac{59}{90} = \frac{346}{540} = \frac{173}{270} \end{aligned}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۶

۲۶

اگر $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B|A) = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $P(A \cap B')$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{2}{10}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \\ P(A \cap B') &= P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۸%

قلمچی ۱۳۹۶

۲۷

در یک آزمایش تصادفی، $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ ، $P(b)$ و $P(c)$ یک دنباله هندسی تشکیل دهند، مقدار $P(b)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

دشوار

درصد پاسخگویی ۸%

قلمچی ۱۳۹۶

اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ ، $P(b)$ و $P(c)$ تشکیل دنباله هندسی دهند، آن‌گاه $P(b) = \frac{1}{4}q$ و $P(c) = \frac{1}{4}q^2$ بوده و از طرفی جمع احتمالات برابر با ۱ است. بنابراین:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}q^2 = 1 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 4$$

$$\Rightarrow q^2 + q - 3 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

از بین دو جواب به دست آمده، فقط جواب مثبت قابل قبول است، زیرا احتمال همواره کمیتی نامنفی است. پس $q = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ می‌باشد و در نتیجه داریم:

$$P(b) = \frac{1}{4}q = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2} \right) = \frac{\sqrt{13}-1}{8}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۸

(۲۸)

علی و رضا دو دوست هستند. می‌دانیم احتمال به سفر رفتن علی در صورتی که رضا به سفر رفته باشد، با احتمال به سفر رفتن رضا در صورتی که علی به سفر نرفته باشد، برابر است. اگر احتمال به سفر رفتن رضا در صورتی که علی به سفر رفته باشد، $۰/۷۵$ و احتمال به سفر رفتن رضا $۰/۴$ باشد، احتمال اینکه علی و رضا هر دو به سفر بروند، کدام است؟

(۴) $۰/۱$ (۳) $۰/۲۵$ (۲) $۰/۳$ (۱) $۰/۴$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۲

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

سفر رفتن علی: A

سفر رفتن رضا: B

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$P(A|B) = P(B|A') \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \quad (۱)$$

$$P(B|A) = ۰/۷۵ \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = ۰/۷۵$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۷۵ P(A) \quad (۲)$$

$$P(B') = ۰/۴ \Rightarrow ۱ - P(B) = ۰/۴ \Rightarrow P(B) = ۰/۶ \quad (۳)$$

با قرار دادن (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$\frac{۰/۷۵ P(A)}{۰/۶} = \frac{۰/۶ - ۰/۷۵ P(A)}{1 - P(A)}$$

$$\Rightarrow ۵ P(A) - ۵(P(A))^۲ - ۲/۴ + ۳ P(A) = ۰$$

$$\Rightarrow ۵(P(A))^۲ - ۸ P(A) + ۲/۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} P(A) = ۰/۴ \\ P(A) = ۱/۲ \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۲)} P(A \cap B) = ۰/۴ \times ۰/۷۵ = ۰/۳$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۵%

قلمچی ۱۳۹۸

(۲۹)

دو جعبه داریم که اولی دارای یک لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب و دومی دارای ۶ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول یک لامپ به تصادف انتخاب کرده و در جعبه دوم قرار می‌دهیم و سپس ۲ لامپ به تصادف از جعبه دوم خارج می‌کنیم. احتمال آنکه لامپ‌های خارج شده از جعبه دوم هر دو سالم یا هر دو معیوب باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{11}{45}$ (۲) $\frac{12}{45}$ (۳) $\frac{22}{45}$ (۴) $\frac{24}{45}$

پاسخ: گزینه ۳

دشوار

درصد پاسخگویی ۵%

قلمچی ۱۳۹۸

اگر پیشامدهای B_1 و B_2 به ترتیب سالم و معیوب بودن لامپ انتخابی از جعبه اول و پیشامد A سالم بودن هر دو لامپ یا معیوب بودن هر دو لامپ انتخابی از جعبه دوم باشد، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\binom{7}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{2}{3} \times \frac{\binom{6}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{21+3}{45} + \frac{2}{3} \times \frac{15+6}{45} = \frac{8}{45} + \frac{14}{45} = \frac{22}{45}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۴%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۲

(۳۰)

در کیسه‌ای ۵ کارت با شماره‌های ۳، ۴، ۶، ۹ و ۱۰ وجود دارد. از این کیسه ۳ کارت با جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم که دقیقاً ۲ بار کارت با عدد ۳ خارج شده است، با کدام احتمال مجموع سه عدد ظاهر شده برابر با ۱۵ می‌باشد؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

دشوار

درصد پاسخگویی ۴%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۲

تعداد حالاتی که دقیقاً دو بار عدد سه خارج شده باشد، برابر است با:

$$n(S) = \binom{3}{2} \times \underset{4,6,9,10}{4} = 3 \times 4 = 12$$

حالات مطلوب عبارت‌اند از $(9, 3, 3)$ ، $(3, 9, 3)$ و $(3, 3, 9)$ ، یعنی $n(A) = 3$ است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۸%

قلمچی ۱۳۹۸

(۳۱)

در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که ۳ تای آنها معیوب‌اند. لامپ‌ها را یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم تا دومین لامپ سالم خارج شود. با کدام احتمال حداکثر پس از خارج کردن سومین لامپ به این منظور می‌رسیم؟

(۴) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{9}{14}$ (۱) $\frac{5}{14}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۸%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۴

در جعبه، ۵ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب وجود دارد.

$$P(\text{اولی و دومی سالم}) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{28}$$

$$P(\text{اولی معیوب و دومی و سومی سالم}) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}$$

$$P(\text{اولی سالم، دومی معیوب و سومی سالم}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}$$

اگر پیشامد مورد نظر سؤال را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{10}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۸

(۳۲)

از مجموعه $\{201, 202, 203, \dots, 500\}$ ، یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، این عدد نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵ می‌باشد؟

(۴) $0/64$ (۳) $0/60$ (۲) $0/54$ (۱) $0/45$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۸

پاسخ: گزینه ۳

$$S = \{201, 202, \dots, 500\}$$

A و B را زیرمجموعه‌هایی از S در نظر می‌گیریم که اعضای آن به‌ترتیب بر ۴ و ۵ بخش‌پذیرند. داریم:

$$n(A) = \left[\frac{500}{4} \right] - \left[\frac{200}{4} \right] = 125 - 50 = 75$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{75}{300}$$

$$n(B) = \left[\frac{500}{5} \right] - \left[\frac{200}{5} \right] = 100 - 40 = 60$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{300}$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{500}{20} \right] - \left[\frac{200}{20} \right] = 25 - 10 = 15$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{15}{300}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - \left(\frac{75}{300} + \frac{60}{300} - \frac{15}{300} \right) = \frac{180}{300} = \frac{3}{5} = 0/6$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۶

۳۳

یک تیم فوتسال ۱۲ عضو دارد. فرض کنید آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این‌که اولین و دومین نفراتی که وارد می‌شوند به‌ترتیب دروازه‌بان و مدافع باشند، کدام است؟ (این تیم دو دروازه‌بان و سه مدافع دارد.)

$$\begin{aligned} (۲) & \frac{1}{۴۴} \\ (۴) & \frac{1}{۶۶} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) & \frac{1}{۲۲} \\ (۳) & \frac{1}{۱۳۲} \end{aligned}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۱

فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی برابر است با ۱۱×۱۲ . تعداد حالات پیشامد مطلوب برای این که اولین و دومین نفرات به‌ترتیب دروازه‌بان و مدافع باشند برابر است با ۳×۲ ، پس احتمال موردنظر می‌شود:

$$P(A) = \frac{۲ \times ۳}{۱۲ \times ۱۱} = \frac{1}{۲۲}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۵%

قلمچی ۱۳۹۶

۳۴

اگر $P(A|B) = \frac{۳}{۵}$ و $P(B|A) = \frac{۴}{۷}$ باشد، در این صورت حاصل $\frac{P(A-B)}{P(B-A)}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (۲) & \frac{۹}{۸} \\ (۴) & \frac{۴۰}{۶۱} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) & \frac{۲۱}{۲۰} \\ (۳) & \frac{۴۲}{۶۱} \end{aligned}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۵%

قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم $P(A \cap B) = x$ باشد، در این صورت داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(B) = \frac{۵}{۳}x$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow P(A) = \frac{۷}{۴}x$$

$$\frac{P(A-B)}{P(B-A)} = \frac{P(A)-P(A \cap B)}{P(B)-P(A \cap B)}$$

$$= \frac{\frac{۷}{۴}x - x}{\frac{۵}{۳}x - x} = \frac{\frac{۳}{۴}x}{\frac{۲}{۳}x} = \frac{۹}{۸}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۶

گزینه های دام دار ۳

۳۵

در یک کارخانه برای بررسی سلامت محصول نهایی، آن را از سه دستگاه مجزا عبور می‌دهند تا به‌ترتیب، جرم، ابعاد و کارایی محصول را کنترل کنند. هر دستگاه در صورت تأیید محصول چراغ سبز و در صورت عدم تأیید آن چراغ قرمز نشان می‌دهد. اگر فضای نمونه‌ای برای بررسی سلامت یک محصول را به‌صورت حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

$$\begin{aligned} (۲) & ۴ \\ (۴) & ۸ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) & ۲ \\ (۳) & ۶ \end{aligned}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۶

گزینه های دام دار ۳

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به این‌که برای هر دستگاه دو حالت سبز یا قرمز وجود دارد، می‌توان مجموعه زیر را فضای نمونه‌ای سلامت محصول در نظر گرفت:

$$S = \{\text{سبز، قرمز}\} \times \{\text{سبز، قرمز}\} \times \{\text{سبز، قرمز}\}$$

$$\Rightarrow n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۹%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۴

۳۶

بسکتبالیستی به احتمال $\frac{4}{5}$ توپی را وارد حلقه می‌کند. اگر او پرتاب اول را گُل کند، ۳ بار دیگر پرتاب می‌کند و اگر پرتاب اول را گُل نکند، ۲ پرتاب دیگر انجام می‌دهد. به چه احتمالی دقیقاً یک توپ خود را گُل می‌کند؟

(۴) $\frac{24}{625}$ (۳) $\frac{32}{625}$ (۲) $\frac{12}{625}$ (۱) $\frac{44}{625}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۹%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۴

پاسخ: گزینه ۱

احتمال گُل شدن: p احتمال گُل نشدن: q

 $\nearrow p \xrightarrow{\text{پرتاب ۳}} qqq$
 $\searrow q \xrightarrow{\text{پرتاب ۲}} pq \text{ یا } qp$

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}\right) \times 2 = \frac{4}{625} + \frac{8}{125} = \frac{44}{625}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۷

۳۷

از کیسه‌ای که محتوی ۳ مهره سفید متمایز و ۳ مهره سیاه متمایز است، ۲ مهره به‌طور تصادفی و با هم خارج می‌کنیم. اگر ۲ مهره خارج شده هم‌رنگ باشند، ۳ سکه و در غیر این صورت ۲ سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، چند عضو دارد؟

(۴) ۸۴

(۳) ۷۲

(۲) ۳۶

(۱) ۱۲

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۴

تعداد حالت‌هایی که ۲ مهره خارج شده هم‌رنگ باشند، برابر است با:

$$\binom{3}{2} + \binom{2}{3} = 3 + 3 = 6$$

$\downarrow$ مهره سفید ۲
 $\downarrow$ مهره سیاه ۲

تعداد حالت‌هایی که ۲ مهره خارج شده هم‌رنگ نباشند، برابر است با:

$$\binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

$\downarrow$ مهره سفید ۱
 $\downarrow$ مهره سیاه ۱

بنابراین تعداد اعضای این فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = 6 \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{پرتاب ۳ سکه}}}{2^3} + 9 \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{پرتاب ۲ سکه}}}{2^2} = 6 \times 8 + 9 \times 4 = 84$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۴%

قلمچی ۱۳۹۶

گزینه های دام دار ۲ - ۳

۳۸

چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) $P(A' \cup B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

ب) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

پ) $P(A \cup B) \geq P(B)$

ت) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

۲ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

۳ (۳)

دشوار

درصد پاسخگویی ۴%

قلمچی ۱۳۹۶

گزینه های دام دار ۲ - ۳

پاسخ: گزینه ۴

الف) $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$$

ب) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

پ) $B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B)$

ت) $P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۳%

قلمچی ۱۳۹۷

۳۹

جعبه A دارای ۳ مهره قرمز و ۱ مهره سفید و جعبه B دارای ۱ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است. از جعبه A سه مهره به تصادف انتخاب کرده و در جعبه B می‌ریزیم و سپس از جعبه B، دو مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این دو مهره قرمز هستند؟

(۲) $\frac{۳}{۸}$
(۴) $\frac{۵}{۸}$

(۱) $\frac{۱}{۴}$
(۳) $\frac{۱}{۲}$

دشوار

درصد پاسخگویی ۳%

قلمچی ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه ۲

برای انتخاب ۳ مهره از جعبه A دو حالت داریم:

الف) هر سه مهره قرمز باشند.

ب) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد.

احتمال آن‌که دو مهره خارج شده از جعبه B قرمز باشند به تفکیک حالت‌های «الف» و «ب» عبارت‌اند از:

الف)

$$\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۴}{۳}} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۶}{۴۰}$$

ب)

$$\frac{\binom{۳}{۲} \times \binom{۱}{۱}}{\binom{۴}{۳}} \times \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۳ \times ۱}{۴} \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۹}{۴۰}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۶}{۴۰} + \frac{۹}{۴۰} = \frac{۶+۹}{۴۰} = \frac{۱۵}{۴۰} = \frac{۳}{۸}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۱%

قلمچی ۱۳۹۶

۴۰

دو تاس را با هم می‌ریزیم. در صورتی که بدانیم مجموع دو عدد رو شده بیش‌تر از ۴ است، احتمال این‌که کوچک‌ترین عدد رو شده ۳ باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{۳}{۱۰}$

(۳) $\frac{۷}{۳۰}$

(۲) $\frac{۱}{۴}$

(۱) $\frac{۴}{۱۵}$

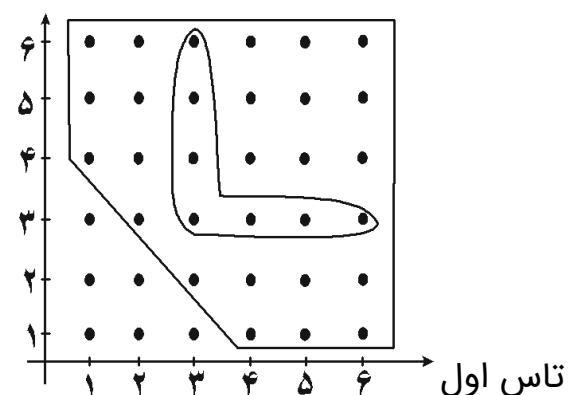
دشوار

درصد پاسخگویی ۱۱%

قلمچی ۱۳۹۶

پاسخ: گزینه ۳

تاس دوم



در شکل، فضای نمونه‌ای کاهش یافته و پیشامد مطلوب نمایش داده شده است. با توجه به شکل، احتمال این‌که کوچک‌ترین عدد رو شده ۳ باشد به شرطی که مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴ باشد برابر $\frac{۷}{۳۰}$ است.