

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۲%

قلمچی ۱۳۹۷

۱

سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. شانس برنده شدن a و b مساوی یکدیگر و شانس برنده شدن هر کدام از آن‌ها دو برابر c است. احتمال برد b یا c کدام است؟

 $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$P(a) = P(b) = 2x, \quad P(c) = x \Rightarrow 2x + 2x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۲%

قلمچی ۱۴۰۰

۲

درون جعبه‌ای ۴ مهره زرد، ۲ مهره قرمز و ۵ مهره سبز موجود است. دو مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم، با چه احتمالی همرنگ نیستند؟

 $\frac{37}{55}$ (۱) $\frac{38}{55}$ (۳) $\frac{8}{11}$ (۲) $\frac{6}{11}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای این‌که دو مهره همرنگ نباشند یا یکی سبز و یکی زرد یا یکی سبز و یکی قرمز یا یکی زرد و یکی قرمز هستند. بنابراین:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{20+8+10}{55} = \frac{38}{55}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۲%

قلمچی ۱۳۹۸

۳

احتمال قبول شدن علی و رضا در امتحان ریاضی به ترتیب برابر $\frac{6}{10}$ و $\frac{7}{10}$ است. با چه احتمالی حداقل یک نفر از آن‌ها در امتحان ریاضی قبول می‌شود؟

 $\frac{82}{100}$ (۴) $\frac{86}{100}$ (۳) $\frac{88}{100}$ (۲) $\frac{84}{100}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پیشامد آن‌که حداقل یکی از این دو نفر در امتحان ریاضی قبول شوند، متمم آن است که هیچ کدام در امتحان ریاضی قبول نشوند. اگر پیشامدهای قبول شدن علی و رضا را به ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه این دو پیشامد و در نتیجه پیشامدهای A' و B' مستقل از یکدیگرند و داریم:

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{12}{100} = \frac{88}{100}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۰%

قلمچی ۱۴۰۰

۴

۶۰ درصد دانش‌آموزان یک مدرسه واکسن کرونا زده‌اند. احتمال ابتلا به بیماری کرونا در افرادی که واکسن زده‌اند ۲ درصد و برای سایر افراد ۲۰ درصد است. اگر یکی از دانش‌آموزان این مدرسه کرونا گرفته باشد، با چه احتمالی واکسن نزده است؟

$$\begin{aligned} (۲) & \frac{۲۲}{۲۵} \\ (۴) & \frac{۴}{۵} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) & \frac{۲۰}{۲۳} \\ (۳) & \frac{۱}{۲۳} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

فرض کنید A پیشامد زدن واکسن و B پیشامد ابتلا به کرونا باشد.

طبق قانون احتمال کل:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$$

$$= \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۲}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۹۲۰}{۱۰۰۰۰}$$

و طبق قانون بیز:

$$P(A'|B) = \frac{P(A')P(B|A')}{P(B)} = \frac{\frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۲۰}{۱۰۰}}{\frac{۹۲۰}{۱۰۰۰۰}} = \frac{۸۰۰}{۹۲۰} = \frac{۲۰}{۲۳}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۷

۵

از مجموعه اعداد $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۳۰۰\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی نه بر ۵ و نه بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

$$(۴) \frac{۱}{۲}$$

$$(۳) \frac{۲}{۳}$$

$$(۲) \frac{۴}{۵}$$

$$(۱) \frac{۵}{۶}$$

پاسخ: گزینه ۳

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «بخش‌پذیری بر ۵» و «بخش‌پذیری بر ۶» تعریف کنیم، آنگاه داریم:

$$n(S) = ۳۰۰$$

$$n(A) = \left[\frac{۳۰۰}{۵} \right] = ۶۰, \quad n(B) = \left[\frac{۳۰۰}{۶} \right] = ۵۰$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{۳۰۰}{۳۰} \right] = ۱۰$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$\frac{۶۰ + ۵۰ - ۱۰}{۳۰۰} = \frac{۱۰۰}{۳۰۰} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۶

۶

برای دو پیشامد ناسازگار A و B، اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B') = \frac{2}{5}$ باشد، احتمال وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B کدام است؟

$$\begin{aligned} (2) & \frac{14}{15} \\ (4) & \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) & \frac{7}{15} \\ (3) & \frac{11}{15} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(B') = \frac{2}{5} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5+9}{15} = \frac{14}{15}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۸

۷

از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۷ است؟

$$(4) \frac{0}{43}$$

$$(3) \frac{0}{42}$$

$$(2) \frac{0}{41}$$

$$(1) \frac{0}{34}$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

پیشامدهای آن که عدد انتخابی مضرب ۳ باشد و عدد انتخابی مضرب ۷ باشد را به ترتیب A و B در نظر می‌گیریم. داریم: $|S| = 100$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{7} \right] - \left[\frac{100}{21} \right] \\ &= 33 + 14 - 4 = 43 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{43}{100} = \frac{0}{43}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

۸

پیشامد «A رخ ندهد یا B رخ ندهد» به کدام صورت زیر نوشته می‌شود؟

$$(A - B) \cup (B - A) \quad (2)$$

$$(A \cup B)' \quad (1)$$

$$A' \cup B' \quad (4)$$

$$(A' \cap B') \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

می‌دانیم که پیشامد «A رخ ندهد» همان A' است. بنابراین:

$$(A \text{ رخ ندهد}) \text{ یا } (B \text{ رخ ندهد}) \rightarrow A' \cup B'$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۵%

قلمچی ۱۳۹۵

گزینه های دام دار ۳

۹

در شهری درصد گروه‌های خونی برای گروه‌های A ، B ، AB و O به ترتیب از راست به چپ، برابر ۳۰، ۲۰، ۱۴ و ۳۶ می‌باشد، اگر در این شهر مجروحی را به اورژانس بیاورند، احتمال آن‌که گروه خونی‌اش A یا B باشد، چقدر است؟

(۴) ۰/۵

(۳) ۰/۴۴

(۲) ۰/۴۲

(۱) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۴

گروه خونی یک نفر نمی‌تواند هم A و هم B باشد، پس این دو پیشامد ناسازگارند، پس $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100} = 0.5$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۵%

قلمچی ۱۳۹۹

۱۰

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.7$ و $P(A \cap B') = 0.2$ ، آنگاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

(۴) ۰/۵

(۳) ۰/۴

(۲) ۰/۳

(۱) ۰/۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0.2 = 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.7 - 0.4 = 0.3$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۱%

قلمچی ۱۳۹۴

۱۱

کیسه‌ای شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. اگر سه مهره، به صورت متوالی و با جای‌گذاری از کیسه بیرون آوریم، احتمال این‌که هیچ دو مهره متوالی هم‌رنگ نباشد، کدام است؟

(۴) $\frac{25}{243}$ (۳) $\frac{20}{243}$ (۲) $\frac{25}{81}$ (۱) $\frac{20}{81}$

پاسخ: گزینه ۱

برای این‌که دو مهره متوالی هم‌رنگ نباشد، باید به صورت زیر عمل کنیم:

(سومی سیاه و دومی سفید و اولی سیاه) یا (سومی سفید و دومی سیاه و اولی سفید)

چون مهره‌ها با جای‌گذاری انتخاب می‌شوند، پس:

$$P = \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow P = \frac{180}{9 \times 9 \times 9} = \frac{20}{9 \times 9} = \frac{20}{81}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۶

۱۲

خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم دو فرزند آخر آن‌ها دختر است. احتمال آن که این خانواده، حداقل یک پسر داشته باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

دو فرزند آخر دختر است. فضای نمونه‌ای مربوط به دو فرزند اول به صورت زیر است.

$$S = \{ (پ و پ), (پ و د), (د و پ), (د و د) \}$$

حالت مطلوب آن است که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد. پس داریم:

$$A = \{ (پ و پ), (پ و د), (د و پ) \}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۶

۱۳

$\frac{2}{3}$ از کارمندان اداره‌ای مرد و بقیه زن هستند. ۷۵ درصد از مردان و ۶۰ درصد از زنان این اداره متأهل‌اند. یک نفر به تصادف از بین کارمندان این اداره انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم که شخص انتخاب شده متأهل نیست، احتمال آن‌که مرد باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۱) $\frac{5}{9}$

پاسخ: گزینه ۱

اگر A پیشامد مرد بودن شخص انتخابی و B پیشامد متأهل بودن شخص انتخاب شده باشد، مورد خواسته شده در صورت سؤال $P(A|B')$ است. طبق قانون بیز:

$$P(A|B') = \frac{P(A) \times P(B'|A)}{P(B')}$$

$$P(B') = P(A) \times P(B'|A) + P(A') \times P(B'|A')$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A|B') = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۹

۱۴

فضای نمونه یک آزمایش تصادفی غیرهم‌شانس به صورت $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{2}{5}$ و $P(\{a, c, d\}) = \frac{2}{3}$ باشند، آنگاه $P(a)$ برابر کدام است؟

(۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{2}{15}$ (۱) $\frac{1}{15}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$P(\{a, c, d\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(b) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) \Rightarrow \frac{2}{5} = P(a) + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(a) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

نسبتا دشوار

درصد پاسخگویی ۲۷%

قلمچی ۱۳۹۹

۱۵

از بین مضارب دو رقمی عدد ۳، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخاب شده بر ۷ بخش‌پذیر است ولی زوج نیست؟

(۱) $\frac{1}{۳۳}$

(۲) $\frac{1}{۳۰}$

(۳) $\frac{1}{۱۵}$

(۴) $\frac{1}{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیری عدد انتخابی بر ۳ و ۷ و B پیشامد بخش‌پذیری عدد انتخابی بر ۳ و ۲ باشد. در این صورت $A \cap B$ پیشامد بخش‌پذیری عدد انتخابی بر ۲، ۳ و ۷ است. داریم:

$$n(S) = \left[\frac{۹۹}{۳} \right] - \left[\frac{۹}{۳} \right] = ۳۳ - ۳ = ۳۰$$

$$n(A) = \left[\frac{۹۹}{۲۱} \right] - \left[\frac{۹}{۲۱} \right] = ۴ - ۰ = ۴$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{۹۹}{۴۲} \right] - \left[\frac{۹}{۴۲} \right] = ۲ - ۰ = ۲$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{۴}{۳۰} - \frac{۲}{۳۰} = \frac{۲}{۳۰} = \frac{1}{۱۵}$$

نسبتا دشوار

سوالات پرتکرار ۱۳۹۸

بارم

۱۶

۱

علی و مازیار هر کدام به ترتیب با احتمال $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۱۰}$ برای دیدن یک مسابقه ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال $\frac{۷}{۱۰}$ به ورزشگاه می‌رود. اگر علی به ورزشگاه نرفته باشد، با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

اگر پیشامدهای رفتن علی و مازیار به ورزشگاه را به ترتیب با A و B نشان دهیم، آن گاه $P(A) = \frac{۳}{۱۰}$ و $P(B) = \frac{۴}{۱۰}$ و $P(B|A) = \frac{۷}{۱۰}$ است.

به دنبال $P(B'|A')$ هستیم پس داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{۷}{۱۰} = P(B \cap A) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۲۱}{۱۰۰}$$

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(B \cup A)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \left(\frac{۳}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰} - \frac{۲۱}{۱۰۰} \right)}{1 - \left(\frac{۳}{۱۰} \right)} = \frac{1 - \frac{۴۹}{۱۰۰}}{1 - \frac{۳}{۱۰}} = \frac{\frac{۵۱}{۱۰۰}}{\frac{۷۰}{۱۰۰}} = \frac{۵۱}{۷۰}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۴

۱۷

سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که حاصل ضرب اعداد رو شده زوج باشد، کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{8}$$

$$(۳) \frac{7}{216}$$

$$(۲) \frac{7}{8}$$

$$(۴) \frac{3}{8}$$

پاسخ: گزینه ۲

برای آن که حاصل ضرب اعداد رو شده زوج باشد باید حداقل یکی از ۳ تاس زوج ظاهر شود. پس، احتمال آن را می‌خواهیم که حداقل یکی از سه تاس زوج ظاهر شود.

(حداقل یکی زوج ظاهر شود) P

(هیچ کدام زوج نباشد یعنی همه فرد باشند) $1 - P$

$$= 1 - \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۵

۱۸

نفرات A، B و C در یک مسابقه تیراندازی شرکت کرده‌اند. احتمال به هدف زدن نفرات در هر پرتاب به ترتیب از راست به چپ $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است. هر نفر فقط یک تیر پرتاب می‌کند. احتمال آن که فقط یکی از آن‌ها به هدف بزند، کدام است؟

$$(۱) \frac{13}{30}$$

$$(۲) \frac{7}{15}$$

$$(۳) \frac{1}{2}$$

$$(۴) \frac{8}{15}$$

پاسخ: گزینه ۱

باید توجه داشت که هر سه پیشامد مستقل از یکدیگرند.

$P(A \text{ به هدف بزند}) = P(A) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A') = \frac{4}{5}$ (فقط A به هدف بزند)

$P(B \text{ به هدف بزند}) = P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B') = \frac{2}{3}$ (فقط B به هدف بزند)

یعنی A به هدف بزند B و C به هدف نزنند یا B به هدف بزند A و C به هدف نزنند یا C به هدف بزند A و B به هدف نزنند. پس باید متمم هر سه پیشامد را نیز حساب کنیم:

$$P(A) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A') = \frac{4}{5} \text{ (A به هدف نزند)}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B') = \frac{2}{3} \text{ (B به هدف نزند)}$$

$$P(C) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(C') = \frac{3}{4} \text{ (C به هدف نزند)}$$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{13}{30}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۶

۱۹

احتمال اینکه علی به پارک برود، ۹۰ درصد است و احتمال آن که علی و محمد، هر دو به پارک بروند، ۴۵ درصد است. احتمال آن که حداقل یکی از بین علی و محمد به پارک برود، کدام است؟

۰/۹۶ (۴)

۰/۹۷ (۳)

۰/۹۵ (۲)

۰/۹۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر پیشامد رفتن به پارک برای علی و محمد را به ترتیب با A و B نشان دهیم، آن‌گاه:

چون رفتن به پارک این دو شخص از هم مستقل است، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0/45 \Rightarrow 0/9 \times P(B) = 0/45$$

$$\Rightarrow P(B) = 0/5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0/9 + 0/5 - 0/45 = 0/95$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۳۹۷

۲۰

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم، $P(B - A) = 0/2$ و $P(A \cap B) = 0/3$ باشند، حاصل $P(A' \cap B')$ کدام است؟

۰/۱ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$\Rightarrow P(B)P(A') = 0/2 \quad (۱)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A)P(B) = 0/3 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{P(B)P(A')}{P(B)P(A)} = \frac{0/2}{0/3} \Rightarrow \frac{1-P(A)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(A) = 3 - 3P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5} = 0/6 \xrightarrow{(۲)} P(B) = 0/5$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0/4 \times 0/5 = 0/2$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۲

(۲۱)

از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۱۲ بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

۰/۴۲ (۴)

۰/۴۸ (۳)

۰/۵۰ (۲)

۰/۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و ۴ باشند. با توجه به این که $۱۲ = ۳ \times ۴$ است، پس پیشامد آن که عدد انتخابی بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۱۲ بخش‌پذیر نباشد، معادل مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ است. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{[\frac{۲۰۰}{۳}] + [\frac{۲۰۰}{۴}] - [\frac{۲۰۰}{۱۲}]}{۲۰۰} = \frac{۶۶ + ۵۰ - ۱۶}{۲۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲۰۰}$$

با توجه به آن که $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ است، پس داریم:

$$P[(A \cup B) - (A \cap B)] = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{۱۰۰}{۲۰۰} - \frac{۱۶}{۲۰۰} = \frac{۸۴}{۲۰۰} = ۰/۴۲$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۵

(۲۲)

در یک جعبه، ۵ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه موجود است. دو مهره به طور متوالی و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر مهره دوم سفید باشد، با کدام احتمال، اولین مهره نیز سفید است؟

 $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۳}{۷}$ (۳) $\frac{۵}{۱۴}$ (۲) $\frac{۲}{۷}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر پیشامد سفید بودن مهره دوم را با A و پیشامدهای سفید بودن مهره اول و سیاه بودن مهره اول را به ترتیب با B_1 و B_2 نشان دهیم، آن‌گاه:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۱۵} \times \frac{۴}{۱۴}}{\frac{۵}{۱۵} \times \frac{۴}{۱۴} + \frac{۱۰}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۴}} = \frac{۲۰}{۷۰} = \frac{۲}{۷}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۷

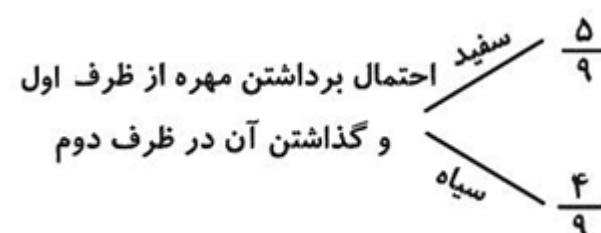
۲۳

دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم، آن‌گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

(۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$ (۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ (۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ (۱) $\frac{۸}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۳

به روش نمودار درختی عمل می‌کنیم:



اگر پیشامد خروج مهره سفید از ظرف دوم را A بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$P(A) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۸}{۱۸} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۷}{۱۸} = \frac{۳۴}{۸۱}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۳%

قلمچی ۱۳۹۸

۲۴

یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آمدن حداقل یک بار رو بیشتر از ۹۵٪ باشد؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در هر بار پرتاب سکه، احتمال آمدن «رو» برابر $\frac{۱}{۲}$ است و پرتاب‌ها مستقل از یکدیگرند. داریم:

$$P(\text{حداقل یک بار «رو»}) = 1 - P(\text{نیاید «رو»})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{۹۵}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{۵}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{۲۰} \Rightarrow 2^n > ۲۰ \Rightarrow n \geq ۵$$

یعنی حداقل سکه را باید ۵ بار پرتاب کنیم.

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۲%

قلمچی ۱۳۹۷

۲۵

اگر برای دو پیشامد مستقل A و B ، $P(A|B) = ۰/۶$ و $P(B|A) = ۰/۲$ باشد، حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟

۰/۸۸ (۴)

۰/۸۴ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۷۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، پیشامدهای A' و B' و همچنین A' و B و همچنین A و B' نیز مستقل‌اند. همچنین اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه $P(A|B) = P(A)$ است. بنابراین داریم:

$$P(A'|B) = P(A') = ۰/۶ \Rightarrow P(A) = ۰/۴$$

$$P(B|A) = P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(B') = ۰/۸$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A)P(B')$$

$$= ۰/۴ + ۰/۸ - ۰/۳۲ = ۰/۸۸$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۰%

قلمچی ۱۳۹۶

۲۶

یک شرکت اتوبوس‌رانی برای جابه‌جایی مسافران نوروزی از دو نوع اتوبوس A و B استفاده می‌کند. ۶۰ درصد جابه‌جایی با اتوبوس A و بقیه توسط اتوبوس B انجام می‌گیرد. اگر نوع A به احتمال ۱۵ درصد و نوع B به احتمال ۱۰ درصد تأخیر در انتقال مسافران به مقصد داشته باشند، در صورتی که مسافری به موقع به مقصد رسیده باشد، با چه احتمالی از اتوبوس نوع A استفاده کرده است؟

 $\frac{۲۱}{۳۶}$ (۴) $\frac{۱۵}{۳۶}$ (۳) $\frac{۱۷}{۲۹}$ (۲) $\frac{۱۲}{۲۹}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از نمودار درختی داریم:

$$\begin{array}{l} \text{نوع } A \left\{ \begin{array}{l} \frac{۶۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} \frac{۸۵}{۱۰۰} \text{ به موقع} \\ \frac{۱۵}{۱۰۰} \text{ تاخیر} \end{array} \right. \\ \frac{۴۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} \frac{۹۰}{۱۰۰} \text{ به موقع} \\ \frac{۱۰}{۱۰۰} \text{ تاخیر} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{نوع } B \left\{ \begin{array}{l} \frac{۶۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} \frac{۸۵}{۱۰۰} \text{ به موقع} \\ \frac{۱۵}{۱۰۰} \text{ تاخیر} \end{array} \right. \\ \frac{۴۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} \frac{۹۰}{۱۰۰} \text{ به موقع} \\ \frac{۱۰}{۱۰۰} \text{ تاخیر} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

احتمال استفاده از اتوبوس نوع A با شرط به موقع رسیدن برابر است با:

$$\frac{\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۵}{۱۰۰}}{\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۵}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۹۰}{۱۰۰}} = \frac{۱۷}{۲۹}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۰%

قلمچی ۱۳۹۸

گزینه های دام دار ۳

۲۷

در یک خانواده چهار فرزندی، تعداد پسرها و دخترها برابر نیست. احتمال آنکه جنسیت دو فرزند اول خانواده یکسان باشد، کدام است؟

 $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد حالت‌های فضای نمونه برای ۴ فرزند، برابر $2^4 = 16$ است. از طرفی تعداد حالت‌هایی که این خانواده دارای ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر باشد، برابر $\binom{4}{2} = 6$ است، بنابراین اگر A پیشامد برابر نبودن تعداد فرزندان پسر و دختر در این خانواده باشد، آنگاه داریم:

$$n(A) = 16 - 6 = 10$$

اگر B پیشامد یکسان بودن جنسیت دو فرزند اول خانواده باشد، آنگاه داریم:

$$A \cap B = \{(پ, پ, پ, پ), (د, پ, پ, پ), (پ, د, پ, پ), (د, د, پ, پ), (پ, پ, د, د), (د, پ, د, د), (پ, د, د, د), (د, د, د, د)\}$$

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۰%

قلمچی ۱۴۰۰

۲۸

دو کیسه داریم که اولی شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و دومی شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. از یکی از این دو کیسه به تصادف مهره‌ای برداشته و در کیسه دیگر می‌گذاریم و سپس یک مهره از کیسه اخیر بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که هر دو مهره خارج شده سفید باشد، کدام است؟

 $\frac{31}{60}$ (۴) $\frac{31}{120}$ (۳) $\frac{9}{20}$ (۲) $\frac{9}{40}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

انتخاب یکی از دو کیسه در مرحله اول به‌طور تصادفی و با شانس برابر انجام می‌شود. احتمال انتخاب مهره سفید از کیسه‌های اول و دوم به ترتیب برابر $\frac{3}{8}$ و $\frac{3}{5}$ است. با افزودن مهره سفید به هر یک از کیسه‌ها، ترکیب آن‌ها دچار تغییر می‌شود. اگر پیشامد خارج شدن دو مهره سفید را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{15} + \frac{1}{8} = \frac{31}{120}$$

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۰%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۲

۲۹

در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{6}{10}$ و این احتمال برای مرتضی $\frac{3}{10}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه محمد به هدف بزند به شرط اینکه بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده، چقدر است؟

 $\frac{3}{9}$ (۴) $\frac{6}{11}$ (۳) $\frac{6}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پیشامد آن که محمد به هدف بزند را A و پیشامد آن که مرتضی به هدف بزند را B در نظر می‌گیریم. بنابراین پیشامد این که حداقل یک تیر به هدف اصابت کند $A \cup B$ خواهد بود. داریم:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$$

$$= \frac{\frac{6}{10}}{\frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{6}{10} \times \frac{3}{10}} = \frac{5}{6}$$

توجه داشته باشید که A و B مستقل از یکدیگر هستند.

دشوار

درصد پاسخگویی ۷%

قلمچی ۱۳۹۷

گزینه های دام دار ۳

۳۰

دسته‌ای کارت شامل ۳ کارت دو رو سفید، ۴ کارت دو رو مشکی و ۴ کارت یک رو سفید و یک رو مشکی داریم. کارتی به تصادف از این دسته کارت انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم. اگر روی مشاهده شده مشکی باشد، احتمال آنکه روی دیگر این کارت نیز مشکی باشد، کدام است؟

 $\frac{4}{11}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{11}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

اگر پیشامد A را مشکی بودن روی مشاهده شده کارت و پیشامدهای B، C و D را به ترتیب انتخاب کارت دو رو سفید، انتخاب کارت دو رو مشکی و انتخاب کارت یک رو سفید و یک رو مشکی در نظر بگیریم، آنگاه طبق قانون احتمال کل و قانون بیز داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D)$$

$$= \frac{3}{11} \times 0 + \frac{4}{11} \times 1 + \frac{4}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{11} \times \frac{3}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{11} \times 1}{\frac{4}{11} \times \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$